

## TENSOREN, EXPONENTIALFUNKTION

Wir betrachten noch einmal Tensoren und wenden uns dann Funktionen zu. Viele physikalische Phänomene werden durch wenige fundamentale Funktionen beschrieben. So tritt zum Beispiel bei allen Wachstumsprozessen die Exponentialfunktion auf.

**[H21] Maßellipsoid** **[1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7 Punkte]**

Für die Andromedagalaxie wurden die Flächen gleicher Sterndichte ermittelt, sie haben die Form

$$4x^2 + 3(y^2 + z^2) + 2\epsilon x(y - z) - 2yz = 1,$$

wobei die Astronomen noch darüber debattieren, ob  $\epsilon$  signifikant von Null verschieden ist.

- Welche Matrix  $M$  hat das obige Maßellipsoid? Das Maßellipsoid ist definiert als die Fläche, auf der die quadratische Form  $Q(\vec{r}) = \vec{r}^\top \cdot M \cdot \vec{r} = 1$  ist.
- Betrachten Sie zunächst den Fall  $\epsilon = 0$ . Zerlegen Sie  $M$  in die Summe  $\alpha \mathbb{1} - M'$  eines Vielfachen der Einheitsmatrix und  $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Geben Sie damit möglichst ohne Rechnung drei Hauptachsenrichtungen  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$  normiert und als Rechtssystem an.
- Führen Sie für  $\epsilon \neq 0$  das in der Vorlesung erklärte Verfahren zur Hauptachsentransformation durch und bestimmen so Eigenwerte und Eigenvektoren  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ .
- Führen Sie für die Lösung aus (c) nun den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  aus und vergleichen Ihr Resultat mit dem aus (b). Welche Beobachtung machen Sie?
- Schreiben Sie den  $\epsilon \rightarrow 0$  Limes der  $\underline{f}$ 's als Linearkombinationen der  $\underline{g}$ 's. Bilden die Koeffizienten dieser Linearkombinationen eine Drehmatrix?

**[H22] Schlittenfahrt** **[1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

Der Weihnachtsmann fährt mit seinem Schlitten einen Hang hinunter. Der Hang sei eine schräge Ebene mit Gefällewinkel  $\alpha$ . Der Schlitten habe die Gesamtmasse  $m$ , und es wirke neben der Schwerkraft  $\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\vec{e}_z$  noch eine Reibungskraft, deren Betrag proportional zum Betrag der Geschwindigkeit ist,  $|\vec{F}_{\text{reib}}| = -Rv(t)$ . Das ist für einen Schlitten auf Schnee eine brauchbare Annahme. Zur Zeit  $t = 0$  habe der Schlitten die Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = 0$ .

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für  $v(t)$  auf.
- Machen Sie einen Ansatz  $v(t) = ae^{bt} + c$  und bestimmen Sie aus Anfangsbedingung und Bewegungsgleichung die Parameter  $a, b, c$ .
- Skizzieren Sie  $v(t)$ . Welche maximale Geschwindigkeit ergibt sich?
- Leiten Sie aus dem gefundenen  $v(t)$  das bekannte Resultat für den reibungsfreien Fall  $R \rightarrow 0$  her.

*Hinweis:* Die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  zeigt entlang der schrägen Ebene. Da es immer nur in diese eine Richtung geht, sind wir nur am Betrag  $v(t)$  interessiert, so dass das Problem eindimensional ist.

**[H23] Elefantenwachstum** **[1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte]**

In einem afrikanischen Nationalpark leben zur Zeit  $t = 0$  eine Anzahl von  $N(0) = N_0$  Elefanten. Die Populationsstärke wird durch die „Bewegungsgleichung“  $\dot{N} = GN - SN$  bestimmt, wobei die Geburtenrate  $G$  und die Sterberate  $S$  im allgemeinen komplizierte Funktionen sämtlicher Umwelteinflüsse sind. Vereinfachend wollen wir annehmen, dass  $S$  konstant, aber  $G$  proportional zum Bestand an Futterpflanzen ist. Dieser Bestand an Futterpflanzen nehme linear mit der Gesamtzahl der Elefanten ab, also  $G = G_0 - \beta N$ . Setzt man nun noch praktischer Weise  $\alpha = G_0 - S > 0$ , so wird unser extrem vereinfachtes Wachstumsmodell durch

$$\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$$

beschrieben.

- Definieren Sie  $y(t) = 1/N(t)$  und schreiben Sie die Differentialgleichung in eine für  $y(t)$  um.
- Machen Sie für  $y(t)$  einen Ansatz  $y(t) = ae^{bt} + c$  analog zu [H22] und bestimmen Sie aus der Anfangsbedingung und der Bewegungsgleichung die freien Parameter.
- Was ergibt sich demnach für  $N(t)$ ? Skizzieren Sie die Lösung. Welche Sättigungswerte ergeben sich für  $N(t \rightarrow \infty)$  und  $G(t \rightarrow \infty)$ ?
- Was ergibt sich im Grenzwert  $\beta \rightarrow 0$ , und was bedeutet dieser Grenzwert?

**HINWEIS: Name, Vorname, und Matrikelnummer angeben! Lösungen bitte zusammenheften!**